FELADATOK A „POLINOMOK” TÉMAKÖRHÖZ

2. rész

3.1. Feladat. Határozza meg az $f = x^3 + 2x^2 + qx - 6 \in \mathbb{C}[x]$ polinomban a q együttható értékét úgy, hogy a polinom egyik gyöke egyenlő legyen a másik két gyök összegével.

3.2. Feladat. Határozza meg a p és q számok értékét úgy, hogy az $f = x^3 - px + 11x - q$ polinom gyökei egymás utáni egész számok legyenek.

3.3. Feladat. Mi lehet az a értéke, ha tudjuk, hogy az $f = x^4 - 4ax^3 + a$ valós együtthatós polinomnak van 0-tól különböző többszörös gyöke?

3.4. Feladat. Anélkül, hogy megkeresné a gyököket, határozza meg
(a) az $f = 2x^4 - 9x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \in \mathbb{C}[x]$ polinom gyökeinek összegét, szorzatát, négyzetösszegét, reciprokösszegét;
(b) az $f = 4x^3 - 8x^2 + 5x - 1$ polinom gyökeinek számtani és mértani közepét;
(c) az $f = 3x^4 - 24x^3 + 67x^2 - 76x + 29$ polinom gyökei harmadik hatványának összegét.

3.5. Feladat. Határozza meg az alábbi $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinomok racionális gyökeit és irreducibilis hatványtényezős alakját $\mathbb{Q}[x]$-ben.
(a) $f = 2x^5 - x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 2$;
(b) $f = 4x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 8x - 4$;
(c) $f = 4x^4 + 10x^3 - 6x^2 - 8x + 4$;
(d) $f = 2x^5 + 3x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 8x - 12$;
(e) $f = x^3 - x^2 - x - 2$;
(f) $f = 9x^4 + 39x^3 + 19x^2 - 5x - 2$;
(g) $f = 5x^8 - 5x^7 + 4x^2 - 2x - 2$.

3.6. Feladat. Irreducibilisek-e az alábbi $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinomok?
(a) $f = x^3 + 5x^2 + x - 7$;
(b) $f = 2x^3 + 3x^2 + 4x - 3$;
(c) $f = x^3 + 5x^2 + 6x + 1$;
(d) $f = 2x^3 + x^2 + x + 1$.

3.7. Feladat. Igazoljuk, hogy az alábbi $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinomok irreducibilisek.
(a) $f = 2x^{100} - 3x^{73} + 69x - 12$;
(b) $f = 41x^{41} - 30x^{30} + 20x^{20} - 10$;
(c) $f = 5x^4 + 22x + 11$;
(d) $f = x^7 - 7x^6 + 24x^5 - 50x^4 + 68x^3 - 57x^2 + 25x - 1$.

3.8. Feladat. Irreducibilisek-e az alábbi $f \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinomok?
(a) $f = x^2 + \overline{1}$;
(b) $f = x^2 + x + \overline{1}$;
(c) $f = x^3 + x + \overline{1}$;
(d) $f = x^4 + x + \overline{1}$;
(e) $f = x^4 + x^2 + \overline{1}$;
(f) $f = x^4 + x^3 + x^2 + x + \overline{1}$;
(g) $f = x^5 + x + \overline{1}$;
(h) $f = x^5 + x^2 + \overline{1}$;
(i) $f = x^7 + x^4 + \overline{1}$.

3.9. Feladat. Irreducibilisek-e az alábbi $f \in \mathbb{Z}_3[x]$ polinomok?
(a) $f = x^2 + x + \overline{1}$;
(b) $f = x^2 + \overline{2}x + \overline{2}$;
(c) $f = x^4 + \overline{2}x^3 + \overline{1}$;
(d) $f = x^4 + \overline{2}x + \overline{2}$;
(e) $f = \overline{2}x^4 + x^3 + \overline{2}$;
(f) $f = x^5 + x^4 + \overline{2}x^2 + \overline{2}$.

3.10. Feladat. A **3.8. Feladat** (f) része megoldásának felhasználásával igazolja, hogy az $x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 3 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben.

3.11. Feladat. Írja fel az alábbi $f \in \mathbb{Z}_5[x]$ polinomok irreducibilis hatványtényezős alakját $\mathbb{Z}_5[x]$-ben.
(a) $f = x^2 + x + \overline{1}$;
(b) $f = x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{2}x + \overline{1}$.

3.12. Feladat. Hányszoros gyöke a c szám az f polinomnak? Oldja meg a feladatot Horner-elrendezéssel és deriválással is.
(a) $f = x^3 - 4x^2 + 5x - 2,\ c = 1$;
(b) $f = x^6 + 4x^5 + 7x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 4x + 1,\ c = -1$;

3.13. Feladat. Az a és b valós számok mely értékeire teljesül. hogy az f valós együtthatós polinomnak a c szám háromszoros gyöke?

(a) $f = x^4 + ax^3 + bx^2 + 4x - 8,\ c = 2;$
(b) $f = x^4 + ax^3 + 6x^2 - bx - 8,\ c = -2;$
(c) $f = x^4 + ax^3 - bx - 81,\ c = -3;$
(d) $f = x^5 + ax^3 + bx^4 + ax^2 + bx + 1,\ c = -1.$

3.14. Feladat. Az a és b valós számok mely értékeire létezik az f polinomnak legalább háromszoros gyöke?
(a) $f = 3x^5 - 10x^3 + ax + b;$
(b) $f = 2x^6 - 5x^4 + ax + b;$
(c) $f = \frac{1}{5}x^5 - 6x^3 + ax + b;$
(d) $f = 3a^2x^4 - 2a(a+b)x^3 + 2abx^2 - 2b^2x - 2a.$

3.15. Feladat. Milyen λ komplex számra van többszörös gyöke az $f = x^3 + 24x + \lambda \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak?

3.16. Feladat. Legyenek m és n olyan természetes számok, amelyekre teljesül, hogy $m < n$, valamint legyen $f = x^{2n} + x^{n+m} + x^{n-m} + 1$.
(a) Határozza meg, hogy mely m és n esetén teljesül, hogy $x^2 + 1 \mid f$.
(b) Van-e olyan m és n, amelyre az is teljesül, hogy $(x^2+1)^2 \mid f$?

3.17. Feladat. Adjon eljárást tetszőleges f polinomból olyan polinom kiszámítására, amelynek nincs többszörös gyöke, és amelynek gyökei pontosan azok a számok, amelyek f-nek
(a) kétszeres gyökei;
(b) háromszoros gyökei

3.18. Feladat. Adjon meg olyan képletet, amely tetszőleges f polinomra olyan polinomot ad, amely bármely $k \in \mathbb{N}$-re az f polinom k-szoros gyökeit pontosan $\max(0, k-2)$ multiplicitással tartalmazza ($k \in \mathbb{N}_0$), és nincs más gyöke.

3.19. Feladat. Ellenőrizze le (a **3.10. Feladat**, valamint a **3.6. Feladat** (f) része segítségével), hogy az f polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, majd oldja meg az $fu + gv = 1$ egyenletet $\mathbb{Q}[x]$-ben az u, v ismeretlen polinomokra vonatkozóan. Ennek segítségével adja meg a lehető legegyszerűbb alakban a $\mathbb{Q}[x]/(f)$ test w elemét.
(a) $f = 2x^3 + x^2 + x + 1,\ g = x^2 + x + 1,\ w = \left(\overline{x^2 + x + 1}\right)^{-1};$
(b) $f = x^4 + x^3 + 3x^2 + x - 3,\ g = x^3 + 3x - 2,\ w = \left(\overline{x^3 + 3x - 2}\right)^{-1}.$

3.20. Feladat.
(a) Állapítsa meg, hogy testet alkotnak-e az alábbi maradékosztálygyűrűk:

$$\mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + \overline{1}), \quad \mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x + \overline{1}), \quad \mathbb{Z}_3[x]/(x^3 + x^2 + x + \overline{1}), \quad \mathbb{Z}_5[x]/(x^5 + \overline{1}).$$

(b) Azokban a maradékosztálygyűrűkben, amelyik test, adja meg a következő elemeket a lehető legegyszerűbb alakban:

$$\overline{x^2}, \quad \left(\overline{x^3}\right)^{-1}, \quad \left(\overline{x^4 + x^3 + \overline{1}}\right)^{-1}, \quad \overline{x + \overline{1}}, \quad \left(\overline{x^2 + \overline{1}}\right)^3, \quad \left(\overline{x + \overline{1}}\right)^{-1}.$$